

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ**  
**ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΔΕΥΤΕΡΑ 24 ΜΑΪΟΥ 2004**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του παρακάτω πίνακα και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II**, έτσι ώστε να προκύπτει η σωστή αντιστοίχιση. (Δύο στοιχεία της **Στήλης II** περισσεύουν).

<b>Στήλη I</b> Είδος κωνικής τομής	<b>Στήλη II</b> Εξίσωση γραμμής
<b>α.</b> Παραβολή	<b>1.</b> $x^2 + y^2 = \rho^2, \rho > 0$
<b>β.</b> Κύκλος	<b>2.</b> $x + y = \alpha, \alpha \neq 0$
<b>γ.</b> Υπερβολή	<b>3.</b> $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha, \beta > 0$
<b>δ.</b> Έλλειψη	<b>4.</b> $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha, \beta > 0$
	<b>5.</b> $y^2 = 2px, p > 0$
	<b>6.</b> $x^3 = \beta y^2, \beta \neq 0$

**Μονάδες 4**

Για κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις **B.** και **Γ.**, να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν αυτή είναι **Σωστή** ή (**Λ**), αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

- Β.** Αν  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, που σχηματίζουν γωνία  $\theta$ , τότε ισχύει:

$$\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} .$$

**Μονάδες 3**

- Γ.** Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ , τότε η εξίσωσή της είναι:

$$y = \lambda x + \beta, \quad \text{με } \beta \neq 0 .$$

**Μονάδες 3**

- Δ.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  και  $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$ . Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \quad (\text{Επιμεριστική ιδιότητα}).$$

**Μονάδες 15**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , με εξισώσεις  $\varepsilon_1: 3x - 2y + 1 = 0$  και  $\varepsilon_2: 2x + 3y - 8 = 0$  αντίστοιχα.

- α)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon_1$  είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon_2$ .

**Μονάδες 5**

- β)** Υποθέτουμε ότι το σημείο  $A(\alpha, 2)$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon_1$  και το σημείο  $B(-5, \beta)$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon_2$ .

**β1)** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

**Μονάδες 6**

**β2)** Να εξετάσετε αν το σημείο  $M(\alpha, \beta)$  ανήκει στην ευθεία με εξίσωση  $3x - y + 3 = 0$ .

**Μονάδες 6**

- γ)** Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=3, \quad |\vec{\beta}|=2, \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})=\frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}.$$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .

**Μονάδες 8**

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ .

**Μονάδες 7**

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τους θετικούς αριθμούς  $x$ , για τους οποίους ισχύει η σχέση  $(\vec{\alpha} + x\vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 17$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x - 2\lambda y = 0, \quad (1)$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του  $\lambda$ , η γραμμή που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από την αρχή  $O$  των αξόνων.

**Μονάδες 5**

β) Να αποδείξετε ότι, για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$ , η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(2, \lambda)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{\lambda^2 + 4}$ .

**Μονάδες 5**

γ) Για  $\lambda = 2$ , να αποδείξετε ότι ο κύκλος, που ορίζεται από την εξίσωση (1), τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  σε σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, διαφορετικά από την αρχή  $O$ , τέτοια ώστε το τρίγωνο  $OAB$  να είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 8**

- δ) Για  $\lambda = 2$ , να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση  $y = -x$  εφάπτεται στον κύκλο, που ορίζεται από την εξίσωση (1), στο σημείο  $O(0, 0)$ .

*Μονάδες 7*

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.  
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**