ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΛΗ ΤΗΣ
Γ! ΤΑΞΗΣ

1. Τι ονομάζετε δύναμη $α^ν$;

- Ονομάζεται δύναμη $α^ν$ με βάση τον αριθμό α και εκθέτη το φυσικό $ν > 1$, το γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α.

$$\text{Δηλαδή, } α^ν = \underbrace{α \cdot α \cdot α \cdot \cdots \cdot α}_{ν \text{ παράγοντες}}$$

- Ορίζουμε ακόμα ότι: $α^1 = α$

$$α^0 = 1 \quad \text{με } α \neq 0$$

$$α^{-ν} = \frac{1}{α^ν} \quad \text{με } α \neq 0 \text{ και } ν = 1, 2, 3, \ldots$$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητές των δυνάμεων;

- Για δυνάμεις, με εκθέτες γενικά ακέραιους αριθμούς, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες

$$α^μ \cdot α^ν = α^{μ+ν}$$

$$\frac{α^μ}{α^ν} = α^{μ-ν}$$

$$α^ν \cdot β^ν = (α \cdot β)^ν$$

$$\left(\frac{α}{β}\right)^{-ν} = \left(\frac{β}{α}\right)^{ν}$$

$$(α^μ)^ν = α^{μν}$$

- Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

3. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού α;

- Ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό α.

Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{α}$

Επομένως : $\sqrt{α} = χ$ αν και μόνο $χ^2 = α$

Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0} = 0$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητές των ριζών;

I. Από τον ορισμό τις τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού $\alpha \geq 0$ προκύπτει ότι: $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$

II. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = |\,\alpha\,|$

III. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

IV. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

5. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι, $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι αν οι α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$.

Έτσι έχουμε: $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

$$\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\alpha}\right)^2\cdot\left(\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha\beta \Leftrightarrow$$

$\alpha\beta = \alpha\beta$ που ισχύει.

6. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι, $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

V. **Απόδειξη**

Είναι γνωστό ότι αν οι α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$,

Έτσι έχουμε: $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow$$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, που ισχύει.

7. Πως συγκρίνουμε(διατάσουμε) δύο πραγματικούς αριθμούς;

- Αν οι α και β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε:
- Λέμε ότι ο α είναι μεγαλύτερος του β και το συμβολίζουμε $\alpha > \beta$, όταν $\alpha - \beta > 0$.

- Λέμε ότι ο α είναι μικρότερος του β και το συμβολίζουμε $\alpha < \beta$, όταν $\alpha - \beta < 0$.
- Λέμε ότι ο α είναι ίσος με τον β και το συμβολίζουμε $\alpha = \beta$, όταν $\alpha - \beta = 0$.
- Αντίστροφα
- Αν $\alpha - \beta > 0$, τότε ο α είναι μεγαλύτερος του β.
- Αν $\alpha - \beta < 0$, τότε ο α είναι μικρότερο του β.
- Αν $\alpha - \beta = 0$, τότε ο α είναι ίσος με τον β.

8. Τι ονομάζεται ανισότητα και ποια τα χαρακτηριστικά της;

- Η σχέση της μορφής $\alpha > \beta$ (ή $\alpha < \beta$) ονομάζεται ανισότητα με μέλη, πρώτο και δεύτερο, τα α και β (ή τα β και α) αντίστοιχα.
- Οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ (ή $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$) λέγονται ομοιόστροφες (έχουν την ίδια φορά)
- Οι ανισότητες $\alpha < \beta$ και $\gamma > \delta$ (ή $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$) λέγονται ετερόστροφες (έχουν αντίθετη φορά)
- Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός α είναι ταυτόχρονα μεγαλύτερος του χ και μικρότερος του ψ, γράφουμε τη « διπλή » ανισότητα $\chi < \alpha < \psi$.
- Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός χ είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό α, γράφουμε $\chi \geq \alpha$.

9. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ανισοτήτων;

- Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
- Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.
  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιάς ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.
  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.
- Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιάς ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς.
  Δηλαδή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

10. Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση;

- Ονομάζεται αλγεβρική παράσταση κάθε έκφραση που συνδυάζει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

11. Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;

- Ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης ο αριθμός που θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις.

12. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται: α) κλασματική, β) άρρητη;

- Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται κλασματική όταν περιέχει μία τουλάχιστον μεταβλητή σε παρανομαστή.
- Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται άρρητη όταν περιέχει ρίζα με μία τουλάχιστον μεταβλητή στο υπόριζο.

13. Τι ονομάζεται μονώνυμο και πια τα μέρη από τα οποία αποτελείται;

- Ονομάζεται μονώνυμο μια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.
- Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας που γράφεται πρώτος ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

14. Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια;

- Ονομάζονται όμοια δύο ή περισσότερα μονώνυμα τα οποία έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

Πως ορίζεται το άθροισμα ομοίων μονωνύμων;

- Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

15. Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;

- Ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων η πρόσθεση ομοίων μονωνύμων.

16. Πως ορίζεται το γινόμενο μονωνύμων;

- Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει ως συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος όλες τις μεταβλητές με εκθέτη σε κάθε μια το άθροισμα των εκθετών της.

17. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;

- Ονομάζεται πολυώνυμο ένα άθροισμα μονωνύμων τα οποία δεν είναι όμοια.

18. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

- Ονομάζεται ταυτότητα κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών αυτών.

19. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

iii. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^2$

v. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Απόδειξη

i. $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2+\underline{\alpha\cdot\beta}+\underline{\beta\cdot\alpha}+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\cdot\beta+\beta^2$

ii. $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\underline{\alpha\cdot\beta}-\underline{\beta\cdot\alpha}+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\cdot\beta+\beta^2$

iii. $(a+\beta)^3=(a+\beta)^2\cdot(a+\beta)=(a^2+2a\cdot\beta+\beta^2)\cdot(a+\beta)=$

$=a^3+\underline{2a^2\cdot\beta}+\underline{a\cdot\beta^2}+\underline{\beta\cdot a^2}+\underline{2a\cdot\beta^2}+b^3=a^3+3a^2\cdot\beta+3a\cdot\beta^2+\beta^3$

iv. $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)=(\alpha^2-2\alpha\cdot\beta+\beta^2)\cdot(\alpha-\beta)=$

$=\alpha^3-\underline{2\alpha^2\cdot\beta}+\underline{\alpha\cdot\beta^2}-\underline{\beta\cdot\alpha^2}+\underline{2\alpha\cdot\beta^2}-\beta^3=\alpha^3-3\alpha^2\cdot\beta+3\alpha\cdot\beta^2-\beta^3$

v. $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha-\beta^2$

20. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;

- Ονομάζεται παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή γενικότερα μιας αλγεβρικής παράστασης η διαδικασία μετατροπής της παράστασης σε γινόμενο.

21. Τι ονομάζεται εξίσωση: α) 1ου βαθμού β) 2ου βαθμού, με έναν άγνωστο ;

- Ονομάζεται εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής $\alpha\chi+\beta=0$ με $\alpha\neq 0$.

  Ο α λέγεται συντελεστής του αγνώστου και ο β σταθερός (ή γνωστός) όρος.

  Ρίζα της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που αν αντικαταστήσει τον χ στην εξίσωση προκύπτει ισότητα που αληθεύει.

  Επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τη λύση της.

- Ονομάζεται εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha\neq 0$.

  Οι αριθμοί α και β ονομάζονται συντελεστές του δευτεροβαθμίου και πρωτοβαθμίου όρου αντίστοιχα και ο αριθμός γ σταθερός όρος.

  Επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τις τιμές του χ που την επαληθεύουν.

22. Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει την λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha\neq 0$.

Απόδειξη

- Για την απόδειξη του τύπου αυτού θα εφαρμόσουμε την μέθοδο « συμπλήρωσης τετραγώνου» Για την εξίσωση λοιπόν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $\alpha\neq 0$ έχουμε διαδοχικά:

$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$(διαιρούμε και τα δύο μέλη της ισότητας με α)

$$\frac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\alpha}=\frac{0}{\alpha}$$

$$\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \quad (\text{ μεταφορά όρου})$$

$$\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=-\frac{\gamma}{\alpha} \quad (\text{ Δημιουργία διπλάσιου γινομένου})$$

$$\chi^2+2\frac{\beta}{2\alpha}\chi=-\frac{\gamma}{\alpha} \quad \left(\text{ Πρόσθεση και στα δύο μέλη του } \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right)$$

$$\chi^2+2\frac{\beta}{2\alpha}\chi+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=-\frac{\gamma}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \quad (\text{ανάπτυγμα τετραγώνου})$$

$$\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \quad (\mathbf{I})$$

Την παράσταση $\boldsymbol{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ ονομάζουμε διακρίνουσα και την συμβολίζουμε με **Δ.**

Αν $\boldsymbol{\Delta \geq 0}$ από την **(Ι)** έχουμε $\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2$

$$\chi+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } \chi=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } \chi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Αν $\boldsymbol{\Delta < 0}$ ή εξίσωση είναι **αδύνατη** αφού είναι αδύνατον να ισχύει η εξίσωση **(Ι)**
Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς

και $\alpha \neq 0$ δίδονται από τον τύπο: $\chi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και υπάρχουν μόνο εφ' όσον $\boldsymbol{\Delta \geq 0}$

23. Πότε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού:

a. έχει δύο άνισες ρίζες;
b. έχει μια διπλή ρίζα ;
c. δεν έχει ρίζες;

Η εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς, $\alpha \neq 0$ και διακρίνουσα

$$\boldsymbol{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma:}$$

a. έχει δύο ρίζες άνισες που δίνονται από τον τύπο $\chi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, όταν $\boldsymbol{\Delta > 0}$

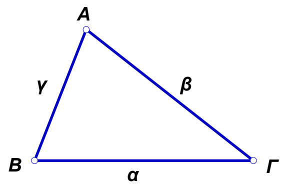
b. έχει δύο ρίζες ίσες που δίνονται από τον τύπο $\chi=\frac{-\beta}{2\alpha}$, όταν $\boldsymbol{\Delta = 0}$

c. δεν έχει ρίζες, όταν $\boldsymbol{\Delta < 0}$

24. Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση και πότε ορίζεται αυτή;

Ονομάζεται κλασματική εξίσωση, κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρανομαστή.
Για να ορίζεται μια κλασματική εξίσωση, πρέπει οι παρανομαστές των κλασμάτων της να είναι διάφοροι του μηδενός.

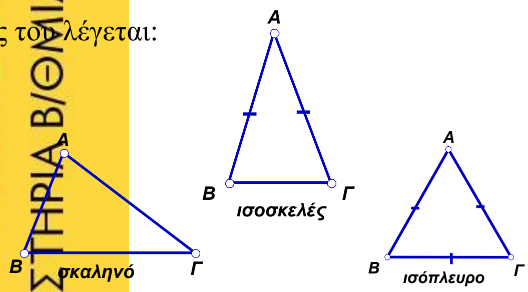
25. Τι ονομάζεται Τρίγωνο και ποια τα κύρια στοιχεία του;



- Ονομάζεται τρίγωνο το επίπεδο σχήμα που ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία τα οποία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα.
- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι, οι πλευρές του και οι γωνίες του
- Πλευρές του τριγώνου ονομάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές του.
- Γωνίες του τριγώνου ονομάζονται οι γωνίες που ορίζονται από τις πλευρές του.

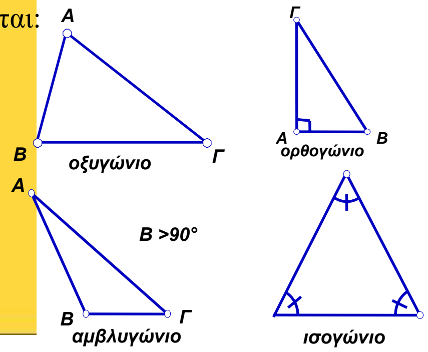
26. Ποια είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές, και ως προς τις γωνίες τους;

Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις πλευρές του λέγεται:



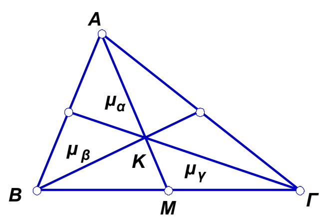
- σκαληνό, αν οι πλευρές του είναι άνισες,
- ισοσκελές, αν δύο πλευρές του είναι ίσες,
- ισόπλευρο, αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.

Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις γωνίες του λέγεται:



- οξυγώνιο, αν όλες του οι γωνίες είναι οξείες,
- ορθογώνιο, αν μία γωνία του είναι ορθή,
- αμβλυγώνιο, αν μία γωνία του είναι αμβλεία.
- Ισογώνιο αν όλες οι γωνίες του είναι ίσες

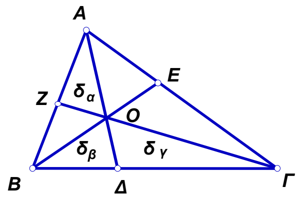
27. Τι ονομάζεται διάμεσος, διχοτόμος, ύψος, τριγώνου.



- Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευράς.

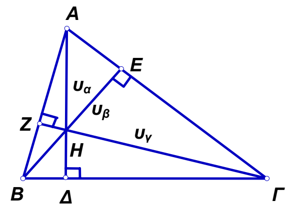
Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διάμεσους που συμβολίζονται μ_α, μ_β, μ_γ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.

- Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου ονομάζεται βαρύκεντρο του τριγώνου.
- Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή της γωνίας με την απέναντι πλευρά και διχοτομεί τη γωνία αυτή.



Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διχοτόμους που συμβολίζονται δ_α, δ_β, δ_γ αντίστοιχα και διέρχονται από το ίδιο σημείο.

- Το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου ονομάζεται έγκεντρο του τριγώνου.
- Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή του προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

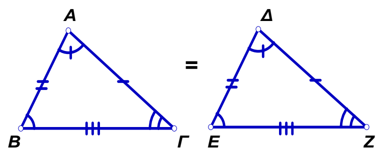


Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρία ύψη που συμβολίζονται δ_α , δ_β , δ_γ αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.

- Το σημείο τομής των υψών ενός τριγώνου ονομάζεται ορθόκεντρο του τριγώνου.

28. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα ;

Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους (πλευρές απέναντι από ίσες γωνίες) ίσες μία προς μία



Έτσι αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα τότε:

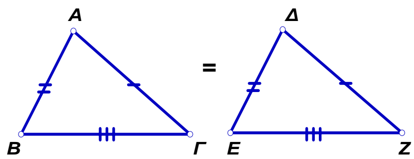
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{\Delta} \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{\Gamma} = \hat{Z}\end{array}\right\}\text{Γωνίες} \qquad \left.\begin{array}{l}B\Gamma = EZ \\ A\Gamma = \Delta Z \\ AB = \Delta E\end{array}\right\}\text{Ομόλογες πλευρές}$$

29. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα;

(Κριτήρια ισότητας τριγώνων)

Κριτήριο (Π. Π. Π.)

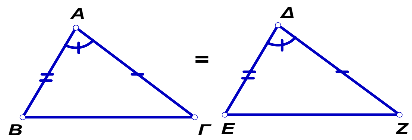
- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι τρεις πλευρές του ενός είναι ίσες με τις τρεις πλευρές του άλλου μία προς μία.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν

$$\left.\begin{array}{l}AB = \Delta E \\ B\Gamma = EZ \\ A\Gamma = \Delta Z\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$$

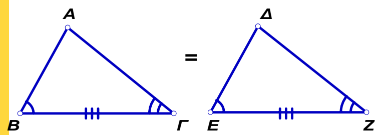
- **Κριτήριο (Π. Γ. Π.)**
- Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν οι δύο πλευρές και η περιεχόμενη σ’ αυτές γωνία του ενός είναι ίσες με τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη σ’ αυτές γωνία του άλλου αντίστοιχα.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν

$$\left.\begin{array}{l} AB = \Delta E \\ A\Gamma = \Delta Z \\ \hat{A} = \hat{\Delta} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$$

- **Κριτήριο (Π. Γ. Γ.)**
- Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία πλευρά και οι προσκείμενες σ’ αυτήν γωνίες του ενός είναι ίσες με την μία πλευρά και τις προσκείμενες σ’ αυτήν γωνίες του άλλου αντίστοιχα.



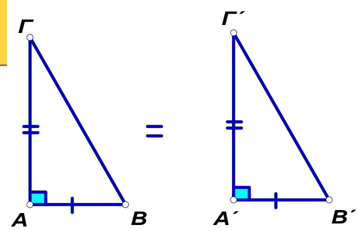
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν

$$\left.\begin{array}{l} B\Gamma = EZ \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{\Gamma} = \hat{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{\Delta EZ}$$

30. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

(Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων)

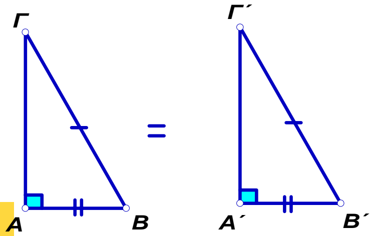
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι δύο κάθετες πλευρές του ενός είναι ίσες με τις δύο κάθετες πλευρές του άλλου.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν :

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A'} = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ A\Gamma = A'\Gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

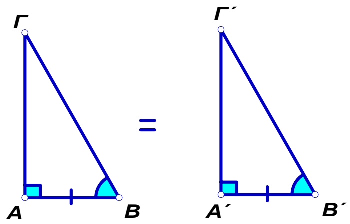
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά του άλλου.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ B\Gamma = B'\Gamma'\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

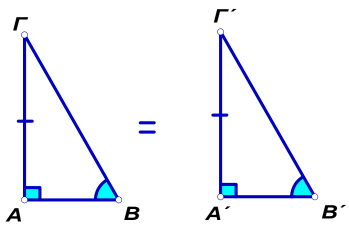
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η προσκείμενη της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με τη μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη της οξεία γωνία του άλλου.



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ \hat{B} = \widehat{B'}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

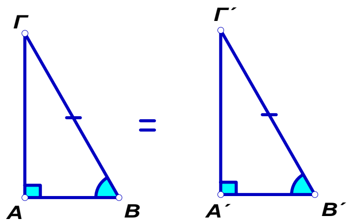
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η απέναντι της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την μία κάθετη πλευρά και την απέναντι της οξεία γωνία του άλλου.



- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ A\Gamma = A'\Gamma' \\ \hat{B} = \widehat{B'}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του άλλου.



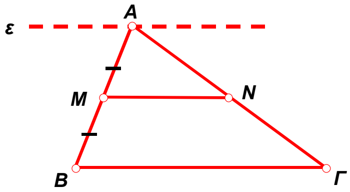
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ \hat{B} = \widehat{B'}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$$

31. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του , αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και το σημείο Μ μέσο της πλευράς του ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν. Θα δείξουμε ότι ΑΝ = ΝΓ.



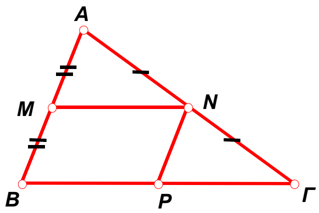
Από το σημείο Α φέρουμε μια βοηθητική ευθεία ε // ΒΓ. Οι παράλληλες ευθείες ε, ΜΝ και ΒΓ ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ, άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΓ. Επομένως ΑΝ = ΝΓ.

32. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Μ, Ν μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Θα δείξουμε ότι ΜΝ // = $\frac{ΒΓ}{2}$

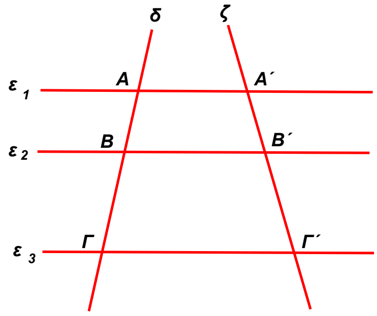


Γνωρίζουμε ότι η παράλληλη προς την ΒΓ από το Μ, που είναι μέσο της ΑΒ, διέρχεται και από το μέσο Ν της ΑΓ. Επομένως ΜΝ // ΒΓ.

Αν από το Ν φέρουμε και την ΝΡ // ΑΒ, το σημείο Ρ θα είναι μέσο της ΒΓ, δηλαδή θα είναι ΒΡ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Αφού όμως έχουμε ΜΝ // ΒΓ και ΝΡ // ΑΒ, το τετράπλευρο ΜΝΡΒ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως ΜΝ // ΒΡ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

33. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή και την πρόταση που προκύπτει από αυτό για ένα τρίγωνο.

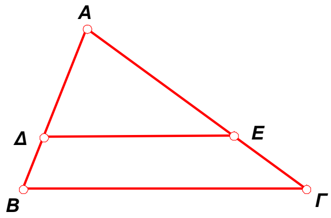


- Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μια είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της άλλης.

  Δηλαδή $\frac{ΑΒ}{Α΄Β΄} = \frac{ΒΓ}{Β΄Γ΄} = \frac{ΑΓ}{Α΄Γ΄}$

- Κάθε παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου χωρίζει τις άλλες πλευρές του, σε ίσους λόγους.

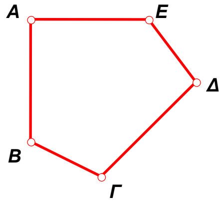
  Δηλαδή $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΕ}} = \frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}$

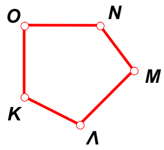


35. Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;

Δύο πολύγωνα λέγονται όμοια, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις πλευρές τους ανάλογες.

Έτσι τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΟΚΛΜΝ ονομάζονται όμοια όταν:





$$\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Ο}},\ \hat{\text{Β}} = \hat{\text{Κ}},\ \hat{\text{Γ}} = \hat{\text{Λ}},\ \hat{\text{Δ}} = \hat{\text{Μ}},\ \hat{\text{Ε}} = \hat{\text{Ν}}$$

και $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΟΚ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΚΛ}} = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΛΜ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΜΝ}} = \frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΝΟ}} = \lambda$

36. Ποιες προτάσεις προκύπτουν από τον ορισμό της ομοιότητα δύο πολυγώνων;

Από τον ορισμό της ομοιότητας δύο πολυγώνων προκύπτουν οι επόμενες προτάσεις.

- Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι και όμοια, με λόγο ομοιότητας 1.
- Κάθε πολύγωνο είναι όμοιο με τον εαυτό του.
- Δύο πολύγωνα όμοια προς τρίτο είναι και όμοια μεταξύ τους.

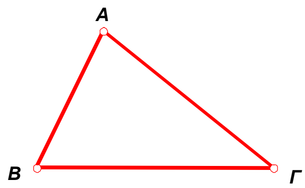
37. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;

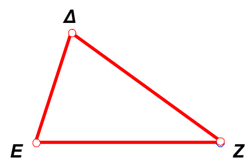
- Δύο τρίγωνα λέγονται όμοια όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες (αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες.

  Δηλαδή αν $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}} \sim \overset{\triangle}{\text{ΔΕΖ}}$, τότε

  $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Δ}},\ \hat{\text{Β}} = \hat{\text{Ε}},\ \hat{\text{Γ}} = \hat{\text{Ζ}}$ και

  $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΖ}}$

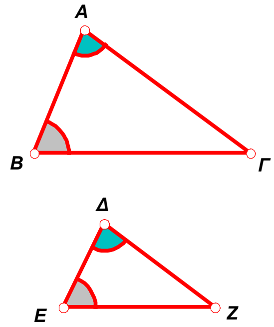




- Ο λόγος των αντιστοίχων (ομολόγων) πλευρών τους ονομάζεται λόγος ομοιότητας και συμβολίζεται με λ.

38. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια; (Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων)

- **1ο Κριτήριο**
- Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου μία προς μία.
  Αν δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν



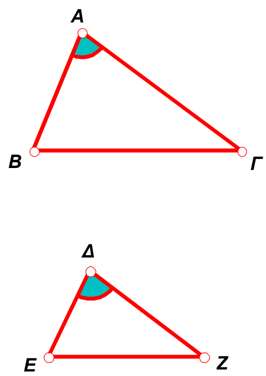
$\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{E}$, τότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \sim \overset{\triangle}{\Delta EZ}$

και επομένως

$$\hat{\Gamma} = \hat{Z} \text{ και } \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

- **2ο Κριτήριο**
- Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν μία γωνία του ενός είναι ίση με μία γωνία του άλλου και οι πλευρές τους που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι ανάλογες.

  Αν δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν



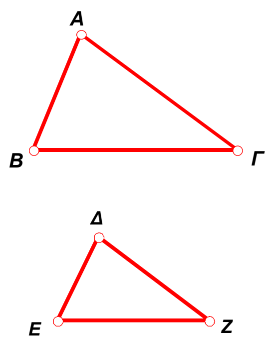
$\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$, τότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \sim \overset{\triangle}{\Delta EZ}$.

και επομένως

$$\hat{B} = \hat{E},\ \hat{\Gamma} = \hat{Z} \quad \text{και} \quad \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

- **3ο Κριτήριο**
- Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν οι πλευρές του ενός είναι ανάλογες με τις πλευρές του άλλου.

  Αν δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν



$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$, τότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \sim \overset{\triangle}{\Delta EZ}$.

και επομένως

$$\hat{A} = \hat{\Delta},\quad \hat{B} = \hat{E} \text{ και } \hat{\Gamma} = \hat{Z}$$

39. Ποια θεωρήματα αναφέρονται στο λόγο των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων και στο λόγο των όγκων δύο ομοίων στερεών σχημάτων;

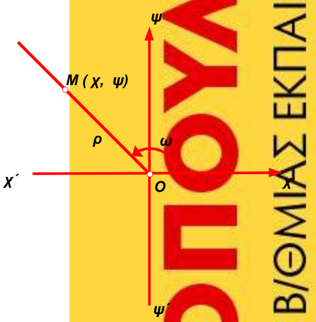
- Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.
- Ο λόγος των όγκων δύο ομοίων στερεών σχημάτων είναι ίσος με τον κύβο του λόγου ομοιότητας τους.

40. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας;

- Έστω ω ($0° \leqq ω \leqq 360°$)η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Οχ, όταν αυτός στραφεί κατά τη θετική φορά.

Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ(χ, ψ) με $\angle χΟΜ = ω$ και ΟΜ = ρ τότε ορίζουμε:

- $ημω = \dfrac{ψ}{ρ}$
- $συνω = \dfrac{χ}{ρ}$
- $εφω = \dfrac{ψ}{χ}$



- Το ημω και συνω παίρνουν τιμές από το – 1 έως το +1.
- Είναι δηλαδή $-1 \leqq ημω \leqq 1$ και $-1 \leqq συνω \leqq 1$
- Η εφω παίρνει οποιαδήποτε τιμή.
- Αν το Μ(χ, ψ) βρίσκεται στο 1 º τεταρτημόριο, τότε ημω> 0, συνω>0, εφω>0
- Αν το Μ(χ, ψ) βρίσκεται στο 2 º τεταρτημόριο, τότε ημω> 0, συνω<0, εφω<0
- Αν το Μ(χ, ψ) βρίσκεται στο 3 º τεταρτημόριο, τότε ημω< 0, συνω<0, εφω>0
- Αν το Μ(χ, ψ) βρίσκεται στο 4 º τεταρτημόριο, τότε ημω< 0, συνω>0, εφω<0

41. Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι τύποι:

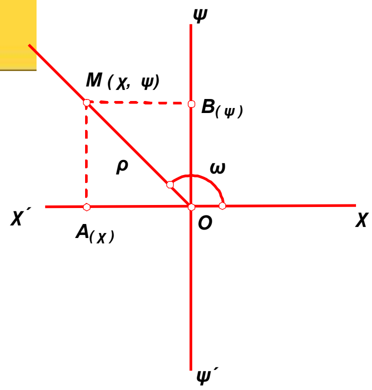
a. $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ και b. $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$

a. Απόδειξη

$$ημ^2ω + συν^2ω = \left(\frac{ψ}{ρ}\right)^2 + \left(\frac{χ}{ρ}\right)^2 = \frac{ψ^2}{ρ^2} + \frac{χ^2}{ρ^2} =$$

$$\frac{ψ^2+χ^2}{ρ^2} = \frac{|ψ|^2+|χ|^2}{ρ^2} = \frac{ΟΒ^2+ΟΑ^2}{ρ^2} =$$

$$\frac{ΑΜ^2+ΟΑ^2}{ρ^2} = \frac{ΟΜ^2}{ρ^2} = \frac{ρ^2}{ρ^2} = 1$$



b. Απόδειξη

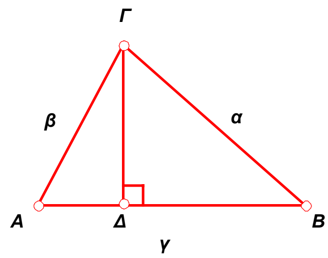
$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{\psi}{\rho}}{\frac{\chi}{\rho}}=\frac{\psi\cdot\rho}{\chi\cdot\rho}=\frac{\psi}{\chi}=\varepsilon\varphi\omega$$

42. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον νόμο των ημιτόνων.

- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\gamma}$

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΔ ($\Gamma\Delta \perp AB$)



Στο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ ($\hat{\Delta}=90°$): $\eta\mu A=\dfrac{\Gamma\Delta}{\beta}\Rightarrow \Gamma\Delta=\beta\cdot\eta\mu A$ **(1)**

Στο $\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$ ($\hat{\Delta}=90°$): $\eta\mu B=\dfrac{\Gamma\Delta}{\alpha}\Rightarrow \Gamma\Delta=\alpha\cdot\eta\mu B$ **(2)**

Από **(1), (2)** $\Rightarrow \beta\cdot\eta\mu A=\alpha\cdot\eta\mu B \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}$ **(3)**

Όμοια αποδεικνύουμε ότι $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ **(4)**

Από **(3), (4)** $\Rightarrow \dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$

43. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον νόμο των συνημιτόνων.

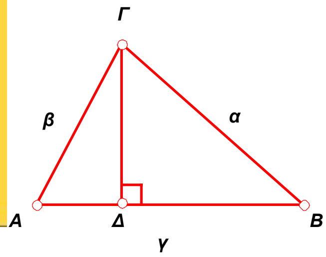
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

Απόδειξη

- Έστω τρίγωνο $^{\triangle}AB\Gamma$ και το ύψος του ΓΔ ($\Gamma\Delta \perp AB$) Θα δείξουμε ότι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$.

  Στο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ ($\hat{\Delta}=90°$):

  $\sigma\upsilon\nu A=\dfrac{A\Delta}{\beta}\Leftrightarrow A\Delta=\beta\cdot\sigma\upsilon\nu A$ **(1)**



- Στο $\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$ ($\hat{\Delta}=90°$):

  $\alpha^2=\Delta\Gamma^2+\Delta B^2\Leftrightarrow$

  $\alpha^2=\Delta\Gamma^2+(\gamma-A\Delta)^2\Leftrightarrow$

  $\alpha^2=\underline{\underline{\Delta\Gamma^2}}+\gamma^2-2\gamma A\Delta+\underline{\underline{A\Delta^2}}\Leftrightarrow$

  $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\gamma A\Delta$ **(2)**

Από την **(1)** η **(2)** γίνεται $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\gamma\beta\sigma\upsilon\nu A$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΛΗ ΤΗΣ
Γ! ΤΑΞΗΣ

1. Τι ονομάζετε δύναμη $α^ν$;
2. Ποιες είναι οι ιδιότητές των δυνάμεων;
3. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού α;
4. Ποιες είναι οι ιδιότητές των ριζών;
5. Αν $α \geq 0$ και $β \geq 0$ να αποδείξετε ότι, $\sqrt{α} \cdot \sqrt{β} = \sqrt{α \cdot β}$
6. Αν $α \geq 0$ και $β \geq 0$ να αποδείξετε ότι, $\frac{\sqrt{α}}{\sqrt{β}} = \sqrt{\frac{α}{β}}$
7. Πως συγκρίνουμε(διατάσουμε) δύο πραγματικούς αριθμούς;
8. Τι ονομάζεται ανισότητα και ποια τα χαρακτηριστικά της;
9. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ανισοτήτων;
10. Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση;
11. Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;
12. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται: α) κλασματική, β) άρρητη;
13. Τι ονομάζεται μονώνυμο και πια τα μέρη από τα οποία αποτελείται;
14. Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια;
15. Πως ορίζεται το άθροισμα ομοίων μονωνύμων;
16. Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;
17. Πως ορίζεται το γινόμενο μονωνύμων;
18. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;
19. Τι ονομάζεται ταυτότητα;
20. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

a. $(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$
b. $(α-β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2$
c. $(α+β)^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3$
d. $(α-β)^3 = α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^2$
e. $(α-β)(α+β) = α^2 - β^2$

21. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;
22. Τι ονομάζεται εξίσωση: α) $1^{ου}$ βαθμού β) $2^{ου}$ βαθμού, με έναν άγνωστο ;
23. Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει την λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $αχ^2 + βχ + γ = 0$ με α, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $α \neq 0$.
24. Πότε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού:
    a. έχει δύο άνισες ρίζες;
    b. έχει μια διπλή ρίζα ;
    c. δεν έχει ρίζες;
25. Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση και πότε ορίζεται αυτή;
26. Τι ονομάζεται Τρίγωνο και ποια τα κύρια στοιχεία του;
27. Ποια είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές, και ως όρος τις γωνίες τους;
28. Τι ονομάζεται διάμεσος, διχοτόμος, ύψος, τριγώνου.
29. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα ;
30. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα; (Κριτήρια ισότητας τριγώνων)
31. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα; (Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων)
32. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του , αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.
33. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
34. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή και την πρόταση που προκύπτει από αυτό για ένα τρίγωνο.
35. Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;
36. Ποιες προτάσεις προκύπτουν από τον ορισμό της ομοιότητα δύο πολυγώνων;
37. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια; (Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων)
38. Ποια θεωρήματα αναφέρονται στο λόγο των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων
39. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας;
40. Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι τύποι:

$$ημ^2ω + συν^2ω = 1 \quad \text{και} \quad εφω = \frac{ημω}{συνω}$$

41. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον νόμο των ημιτόνων.
42. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον νόμο των